XIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA
SEGUNDO NIVEL

APELLIDO:

NOMBRES:

ESCUELA:..

LOCALIDAD:...

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

Problema 1

(a) Hallar dos enteros positivos *x*, *y* tales que cada uno de los dos números

$$x\cdot y+x \quad \text{y} \quad x\cdot y+y$$

sea igual a un número entero elevado al cuadrado.

(b) Determinar si es posible resolver el problema del inciso (a) pero para *x*, *y* ambos comprendidos entre 1000 y 2025, inclusive.

Problema 2

En las casillas de un tablero de 5×5 se han escrito un signo "–" y 24 signos "+", un signo en cada casilla. La operación permitida es:

Elegir un cuadrado que contenga más de una casilla (puede incluso ser el de 5×5) y cambiar todos los signos de sus casillas hacia sus opuestos, es decir, los + por – y viceversa.

Hallar todas las posiciones iniciales de la casilla con "–" para las que es posible obtener un tablero con 25 "+" realizando exclusivamente varias operaciones permitidas.

Problema 3

Sea *PQR* un triángulo rectángulo tal que $P\hat{Q}R = 90^\circ$, *QR* = 10 y el lado *PQ* es mayor que el lado *QR*. Se marca un punto *S* tal que *QS* = *PQ*, *RS* = *RQ*, y además *P* y *S* están en lados distintos respecto a la recta *QR*.

Se sabe que área (*PQR*) = 2·área (*QRS*). Calcular la longitud del lado *PR*.