XII OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA
TERCER NIVEL

APELLIDO:

NOMBRES:

ESCUELA:.....

LOCALIDAD:.....

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

Problema 1

Ana y Beto juegan, por turnos, al siguiente juego. Cada uno de ellos, en su turno, reemplaza un asterisco $*$ por un + o por un –, a elección, en la expresión

$$*7\cdot 8^8 * 7\cdot 8^7 * 7\cdot 8^6 * 7\cdot 8^5 * 7\cdot 8^4 * 7\cdot 8^3 * 7\cdot 8^2 * 7\cdot 8 .$$

Comienza Ana. Después del octavo turno se efectúa la suma algebraica que queda indicada. Si el número obtenido es múltiplo de 13, gana Beto; en caso contrario, gana Ana. Determinar cuál jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 2

Un conjunto *A* de números enteros positivos distintos se dice *no cuadrático* si la suma de todo conjunto de dos o más números de *A* nunca es un cuadrado perfecto. Demostrar que para todo entero $n \geq 2$ existe un conjunto no cuadrático *A* de *n* números.

Problema 3

En el triángulo *ABC* sean *M*, *N*, *P* los puntos medios de los lados *BC*, *CA*, *AB* respectivamente y sea *G* el baricentro del *ABC*. La circunferencia por *B*, *G* y *P* corta a la recta *MP* en *K*, con $K \neq P$, y la circunferencia por *G*, *C* y *N* corta a la recta *MN* en *L*, con $L \neq N$. Demostrar que $B\hat{A}K = C\hat{A}L$.

ACLARACIÓN. El baricentro de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas.