

**XII OLIMPIADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA  
SEGUNDO NIVEL**

APELLIDO:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NOMBRES:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ESCUELA:.....

LOCALIDAD:.....

EN TODOS LOS PROBLEMAS,  
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

**Problema 1**

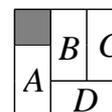
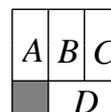
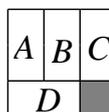
Un número entero positivo con una cantidad par de dígitos se llama *entero veraz* si cada dígito ubicado en una posición impar indica cuántas veces figura en el número el dígito de la posición siguiente. Por ejemplo 1210 es veraz pues tiene un “2” y un “0”, tal como indican el 1 de la posición 1 y el 1 de la posición 3; 2121 también es veraz pues tiene dos “1”, tal como indican el 2 de la posición 1 y el 2 de la posición 3. El número 1031 no es veraz, pues dice tener un “0”, que es correcto, y tres “1”, pero solo tiene dos “1”.

- a) Demostrar que la cantidad de números veraces es mayor o igual que 40000.
- b) Demostrar que la cantidad de números veraces es finita (o sea, no es infinita).
- c) Determinar la mayor cantidad de dígitos que puede tener un número veraz.

**Problema 2**

En un tablero de  $99 \times 99$  dividido en  $99^2$  casillas de  $1 \times 1$  hay que ubicar fichas de dominó de  $2 \times 1$ , sin superposiciones y sin que sobresalgan del tablero, de modo que quede exactamente una casilla vacía. A continuación, Facu realiza repetidas veces el siguiente procedimiento: desliza una ficha que sea vecina a la casilla vacía hasta cubrirla y deja una nueva casilla vacía; tiene prohibido mover una ficha más de una vez. Determinar la mayor cantidad de movidas que puede hacer y dar una configuración en la que esa sea la cantidad de movidas posibles de Facu.

**ACLARACIÓN.** En el tablero de  $3 \times 3$  que se muestra en la figura, Facu puede mover a lo sumo dos fichas: primero desliza la *D* hacia la derecha y luego la *A* hacia abajo.



**Problema 3**

Sea *P* un punto en el interior de un ángulo de vértice *A*. Indicar, con demostración, cómo construir una recta que pase por *P* y que corte a los lados del ángulo en los puntos *B* y *C* de modo que  $PB = PC$ .

Indicar los pasos de la construcción.