TERCER NIVEL

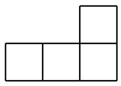
XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Determinar los números reales *a*, *b*, *c*, *d* tales que

$$\begin{cases} a\cdot b+c+d=6 \\ b\cdot c+d+a=2 \\ c\cdot d+a+b=5 \\ d\cdot a+b+c=3. \end{cases}$$

Problema 2.
Se tiene un tablero cuadrado de 8×8 con sus 64 casillas inicialmente blancas. Determinar el menor número de colores necesarios para colorear las casillas, cada una con un color, de modo que si cuatro casillas del tablero se pueden cubrir con una ficha *L* como la de la figura, entonces las cuatro casillas sean de distinto color.
ACLARACIÓN: La ficha se puede rotar o dar vuelta.



Problema 3.
Sea *n* un entero. Determinar la mayor cantidad de números enteros positivos menores o iguales que n^2 que se pueden pintar de rojo con la propiedad de que si *a* y *b* son rojos, $a\neq b$, entonces $a\cdot b$ no es rojo.

TERCER NIVEL

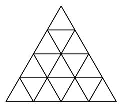
XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Sobre una mesa hay 10000 fósforos, dos de los cuales están dentro de una caja. Ana y Beto juegan por turnos al siguiente juego. Cada uno en su turno agrega a la caja una cantidad de fósforos igual a un divisor propio de la cantidad que hay en ese momento en la caja (es mayor o igual que 1 y menor que el número). El juego termina cuando por primera vez hay más de 2024 fósforos en la caja y la persona que jugó el último turno es la ganadora. Si Ana comienza el juego, determinar quién tiene estrategia ganadora.

Problema 5.
En el triángulo ABC sean $A´$, $B´$, $C´$ puntos en los lados BC, CA, AB respectivamente de modo que $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B}$. La recta paralela a $B´C´$ que pasa por $A´$ corta a la recta AC en P y a la recta AB en Q. Demostrar que $\frac{PQ}{B'C'} \geq 2$.

Problema 6.
Un triángulo equilátero de lado de longitud entera n, con $n \geq 1$, se subdivide en triangulitos de lado 1, mediante paralelas a sus lados, como se muestra en la figura para $n = 4$.



Consideramos el conjunto A de todos los puntos que son vértices de algún triangulito de lado 1. Llamamos *subtriángulo* a todo triángulo equilátero con sus 3 vértices en el conjunto A y sus 3 lados contenidos en líneas de la subdivisión inicial.
Se quiere colorear todos los puntos de A de rojo o de azul de modo que ningún subtriángulo tenga los tres vértices de un mismo color. Si $C(n)$ es la cantidad de coloraciones que satisfacen esta condición, calcular $C(n)$ para cada $n \geq 1$.